DM 5

Exercice 1 : Démonstration de la loi de Laplace

On souhaite démontrer la loi de Laplace à l'aide du premier principe de la thermodynamique.

1. Rappeler la loi de Laplace et ses conditions d'application.

2. Montrer que celle-ci est équivalente à $T\,V^{\gamma-1} = \text{cste}$ et $P^{1-\gamma}\,T^{\gamma} = \text{cste}$.

On considère un gaz parfait constitué de n moles de capacité thermique à volume constant $C_{\text{V}} = \dfrac{n\,R}{\gamma-1}$ qui subit une transformation adiabatique et réversible, en étant soumis uniquement à des forces de pression.

3. Exprimer la variation infinitésimale de l'énergie interne $\mathrm{d}U$ du gaz en fonction de $\mathrm{d}T$.

4. Exprimer $\mathrm{d}U$ en fonction de $\mathrm{d}V$ à l'aide du premier principe de la thermodynamique.

5. En déduire la relation suivante :

$$V\,\mathrm{d}P = -\gamma\,P\,\mathrm{d}V.$$

6. Retrouver la loi de Laplace à partir de cette relation.

Correction :

1. Pour un gaz parfait qui subit une transformation isentropique, c'est-à-dire adiabatique et réversible, la loi de Laplace donne : $P\,V^{\gamma} = \text{cste}$.

2. En utilisant la loi des gaz parfaits $P\,V = n\,R\,T$, on peut exprimer : $P\,V^{\gamma} = \left(\dfrac{n\,R\,T}{V}\right) V^{\gamma} = \text{cste}$, d'où : $T\,V^{\gamma-1} = \text{cste}$.

On peut exprimer de même : $P\,V^{\gamma} = P\left(\dfrac{n\,R\,T}{P}\right)^{\gamma} = \text{cste}$, d'où : $P^{1-\gamma}\,T^{\gamma} = \text{cste}$.

3. Pour un gaz parfait, on peut exprimer : $\mathrm{d}U = C_{\text{V}}\,\mathrm{d}T = \dfrac{n\,R}{\gamma-1}\,\mathrm{d}T$.

4. Le premier principe de la thermodynamique donne : $\mathrm{d}U = \delta W + \delta Q$.
Comme la transformation est quasi-statique, on a : $\delta W = -P_{\text{ext}}\,\mathrm{d}V = -P\,\mathrm{d}V$, et comme la transformation est adiabatique, on a : $\delta Q = 0$, d'où finalement : $\mathrm{d}U = -P\,\mathrm{d}V$.

5. On déduit des questions précédentes : $\dfrac{n\,R}{\gamma-1}\,\mathrm{d}T = -P\,\mathrm{d}V$.

Pour exprimer $\mathrm{d}T$ en fonction de $\mathrm{d}P$, on utilise la loi des gaz parfaits : $\mathrm{d}T = \mathrm{d}\left(\dfrac{P\,V}{n\,R}\right) = \dfrac{P\,\mathrm{d}V + V\,\mathrm{d}P}{n\,R}$, d'où : $\dfrac{P\,\mathrm{d}V + V\,\mathrm{d}P}{\gamma-1} = -P\,\mathrm{d}V$, soit finalement : $V\,\mathrm{d}P = -\gamma\,P\,\mathrm{d}V$.

6. En séparant les variables, on obtient : $\dfrac{\mathrm{d}P}{P} = -\gamma\,\dfrac{\mathrm{d}V}{V}$.
L'intégration donne : $\ln P = -\gamma \ln V + \text{cste}$, d'où : $P = V^{-\gamma} \times \text{cste}$, et on retrouve la loi de Laplace : $P\,V^{\gamma} = \text{cste}$.